Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2020, Extraordinaria

mentoor.es

Problema 1. Campo Gravitatorio

La trajectòria de la Terra al voltant del Sol és una òrbita el·líptica; aquest fet fa que la distància des de la Terra al Sol no sigui la mateixa en totes les èpoques de l'any. El periheli, la distància més curta entre la Terra i el Sol, és de $1,471 \times 10^8$ km. La Terra passa pel periheli durant els primers dies del mes de gener de cada any. La velocitat de la Terra al periheli és de $30,75$ km/s. L'afeli és la posició més allunyada del Sol. Quan la Terra es troba a l'afeli, la seva velocitat orbital és de $28,76$ km/s.

a) **Dibuixeu una òrbita clarament el·líptica (no cal que sigui l'òrbita real) on s'indiqui la posició del Sol i la de la Terra un dia d'hivern de l'hemisferi nord. Utilitzant arguments basats en l'energia, justifiqueu per què la velocitat de la Terra és mínima a l'afeli. Quina és la distància de la Terra al Sol a l'afeli?**

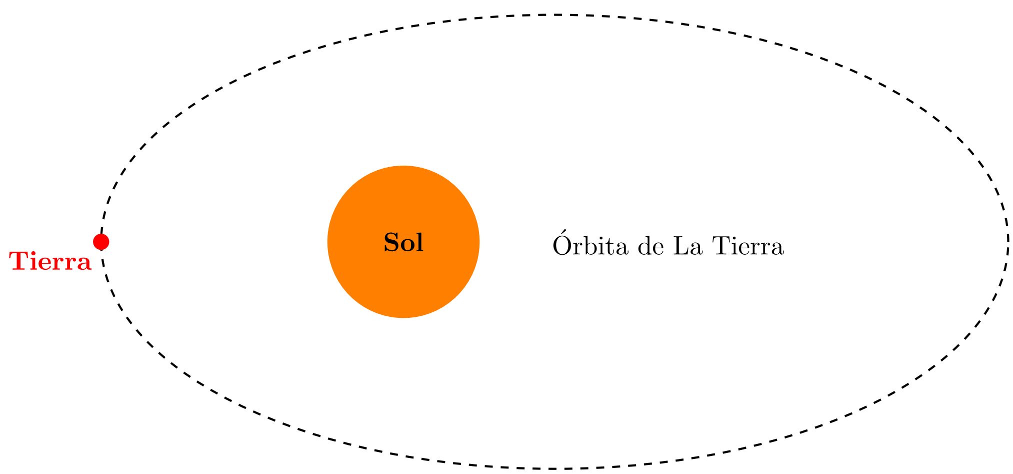
b) **Quina intensitat de camp gravitatori genera el Sol a la seva superfície? Quin és el pes d'una massa de $10,0$ kg a la superfície del Sol?**

Dades:
$G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}.
$M_{\text{Terra}} = 5,97 \times 10^{24}$ kg.
$M_{\text{Sol}} = 1,99 \times 10^{30}$ kg.
$R_{\text{Sol}} = 6,96 \times 10^5$ km.

Solución:

a) **Dibuixeu una òrbita clarament el·líptica (no cal que sigui l'òrbita real) on s'indiqui la posició del Sol i la de la Terra un dia d'hivern de l'hemisferi nord. Utilitzant arguments basats en l'energia, justifiqueu per què la velocitat de la Terra és mínima a l'afeli. Quina és la distància de la Terra al Sol a l'afeli?**

Primero, representamos la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol con un diagrama:



La energía mecánica total de la Tierra en su órbita alrededor del Sol se conserva, ya que la única fuerza que actúa es la fuerza gravitatoria, que es una fuerza conservativa. La energía mecánica (E_m) es la suma de la energía cinética (E_c) y la energía potencial gravitatoria (E_p):

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} M_{\text{Tierra}} v^2 - \frac{G M_{\text{Sol}} M_{\text{Tierra}}}{r} = \text{cte.},$$

donde:
- M_{Tierra} es la masa de la Tierra,
- v es la velocidad orbital de la Tierra,
- G es la constante de gravitación universal,

– M_{Sol} es la masa del Sol,
– r es la distancia entre la Tierra y el Sol.

En el afelio, la distancia r es máxima, lo que implica que el término de la energía potencial gravitatoria es menos negativo (máximo). Como la energía mecánica total se mantiene constante, si la energía potencial es máxima en el afelio, la energía cinética debe ser mínima. Por lo tanto, la velocidad de la Tierra es mínima en el afelio. Utilizando la conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}M_{\text{Tierra}}v_a^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{r_a} = \frac{1}{2}M_{\text{Tierra}}v_p^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}M_{\text{Tierra}}}{r_p}.$$

Simplificamos eliminando M_{Tierra} de ambos lados:

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_a} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_p}.$$

Despejamos r_a:

$$\frac{1}{2}v_a^2 - \frac{1}{2}v_p^2 = \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_a} - \frac{GM_{\text{Sol}}}{r_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(v_a^2 - v_p^2) = GM_{\text{Sol}}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_a} = \frac{1}{r_p} + \frac{v_a^2 - v_p^2}{2GM_{\text{Sol}}}.$$

Finalmente, calculamos r_a:

$$r_a = \left(\frac{1}{r_p} + \frac{v_a^2 - v_p^2}{2GM_{\text{Sol}}}\right)^{-1}.$$

Sustituyendo los valores:

$$r_a = \left(\frac{1}{1,471 \cdot 10^{11}\ \text{m}} + \frac{(2,876 \cdot 10^4\ \text{m/s})^2 - (3,075 \cdot 10^4\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}\right)^{-1} = 1,57 \cdot 10^{11}\ \text{m}.$$

Por lo tanto, la distancia de la Tierra al Sol en el afelio es de $1,57 \cdot 10^{11}$ m.

b) Quina intensitat de camp gravitatori genera el Sol a la seva superfície? Quin és el pes d'una massa de $10,0$ kg a la superfície del Sol?

La intensidad del campo gravitatorio (g_S) generado por el Sol en su superficie se calcula mediante la ley de gravitación universal:

$$g_S = \frac{GM_{\text{Sol}}}{R_{\text{Sol}}^2},$$

donde:
– $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2,
– $M_{\text{Sol}} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg,
– $R_{\text{Sol}} = 6,96 \cdot 10^5$ km $= 6,96 \cdot 10^8$ m.

Sustituyendo los valores:

$$g_S = \frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N·m}^2/\text{kg}^2 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(6,96 \cdot 10^8\ \text{m})^2} = 2,74 \cdot 10^2\ \text{m/s}^2.$$

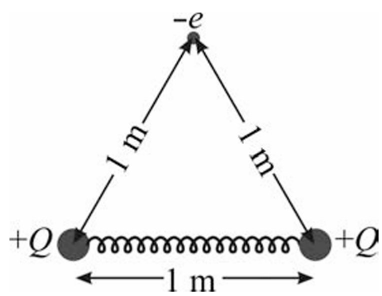
El peso (P) se calcula mediante la fórmula:

$$P = m \cdot g_S \quad \Rightarrow \quad P = 10,0\ \text{kg} \cdot 274\ \text{m/s}^2 = 2,740\ \text{N}.$$

Por lo tanto, la intensidad del campo gravitatorio en la superficie del Sol es de 274 m/s^2 y el peso de una masa de $10,0$ kg en la superficie del Sol es de 2,740 N.

Problema 2. Campo Electromagnético

Dues esferes conductores idèntiques i suficientment petites per a ser considerades puntuals estan unides per una molla. La constant elàstica de la molla és 10 N/m. El conjunt es col·loca sobre una taula que és elèctricament aïllant. A més, no hi ha fricció entre la taula i el conjunt de les dues esferes i la molla. Les esferes estan separades per una distància de 0,40 m quan no estan carregades (la molla no fa cap força). Carreguem amb la mateixa càrrega positiva les dues esferes amb un generador fins que la distància entre elles sigui 1,00 m.



a) **Quan les esferes estan carregades, quina és la força aplicada per la molla sobre cadascuna de les esferes? Quina és la càrrega de cadascuna de les esferes?**

b) **Col·loquem un electró a 1 m de cadascuna de les dues esferes (equidistant a les dues esferes, tal com indica la figura). Calculeu el mòdul del camp elèctric que actua sobre l'electró i el mòdul de l'acceleració en aquest instant. Sobre la figura, representeu la direcció i sentit del camp elèctric i de l'acceleració en el punt on es troba l'electró.**

Dades:
$k = 8,99 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$.
$m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.
$|e| = 1,602 \times 10^{-19}$ C.

Solución:

a) **Quan les esferes estan carregades, quina és la força aplicada per la molla sobre cadascuna de les esferes? Quina és la càrrega de cadascuna de les esferes?**

La fuerza ejercida por un resorte se calcula mediante la ley de Hooke:

$$|\vec{F}_{\mathrm{m}}| = k_{\mathrm{m}} \cdot \Delta l,$$

donde $k_{\mathrm{m}} = 10$ N/m es la constante elástica del resorte y $\Delta l = 1,00\ \mathrm{m} - 0,40\ \mathrm{m} = 0,60$ m es la elongación del resorte. Sustituyendo los valores:

$$|\vec{F}_{\mathrm{m}}| = 10\ \mathrm{N/m} \cdot 0,60\ \mathrm{m} = 6,00\ \mathrm{N}.$$

La fuerza electrostática entre las dos esferas está dada por la ley de Coulomb:

$$|\vec{F}_{\mathrm{e}}| = k_e \cdot \frac{Q^2}{d^2},$$

donde $k_e = 8,99 \cdot 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^{-2}}$ es la constante de Coulomb, Q es la carga en cada esfera y $d = 1,00$ m es la distancia entre las esferas cargadas. Dado que el sistema está en equilibrio y no hay fricción, la fuerza ejercida por el resorte equilibra la fuerza electrostática:

$$|\vec{F}_{\mathrm{e}}| = |\vec{F}_{\mathrm{m}}| = 6,00\ \mathrm{N}.$$

Entonces,

$$6,00 \text{ N} = 8,99 \cdot 10^9 \; \frac{Q^2}{(1,00 \text{ m})^2} \quad \Rightarrow \quad Q^2 = \frac{6,00 \text{ N} \cdot (1,00 \text{ m})^2}{8,99 \cdot 10^9 \text{ N·m}^2/\text{C}^{-2}} = \frac{6,00}{8,99 \cdot 10^9} \text{ C}^2.$$

Tomando raíz cuadrada:

$$Q = \sqrt{\frac{6,00}{8,99 \cdot 10^9}} = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-10}} \text{ C} \approx 2,58 \cdot 10^{-5} \text{ C} = 25,8 \; \mu\text{C}.$$

Por lo tanto, la solución es:
– **La fuerza aplicada por el resorte sobre cada una de las esferas es de $\mathbf{6,00}$ N.**
– **La carga en cada una de las esferas es de $\mathbf{25,8 \; \mu}$C.**

b) **Col·loquem un electró a 1 m de cadascuna de les dues esferes (equidistant a les dues esferes, tal com indica la figura). Calculeu el mòdul del camp elèctric que actua sobre l'electró i el mòdul de l'acceleració en aquest instant. Sobre la figura, representeu la direcció i sentit del camp elèctric i de l'acceleració en el punt on es troba l'electró.**

Dado que el electrón está equidistante a ambas esferas, la dirección del campo eléctrico debido a cada esfera será hacia afuera de las esferas (ya que las cargas son positivas) y se dirigirán en direcciones opuestas en el punto donde se encuentra el electrón. La magnitud del campo eléctrico debido a cada esfera es:

$$E_1 = E_2 = \frac{k_e \cdot Q}{d^2},$$

donde $Q = 25,8 \cdot 10^{-6}$ C es la carga en cada esfera y $d = 1,00$ m es la distancia desde cada esfera al punto donde se encuentra el electrón. Sustituyendo los valores:

$$E_1 = E_2 = \frac{8,99 \cdot 10^9 \text{ N·m}^2/\text{C}^{-2} \cdot 25,8 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(1,00 \text{ m})^2} = 2,32 \cdot 10^5 \text{ N/C}.$$

Como ambos campos eléctricos tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas, la contribución neta dependerá del ángulo entre ellos. Si el electrón está colocado en una posición donde ambos campos se suman, entonces:

$$E_{\text{Total}} = 2 \cdot E_1 \cdot \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre las direcciones de los campos eléctricos. Asumiendo que el electrón está ubicado de tal manera que $\theta = 30°$, entonces:

$$E_{\text{Total}} = 2 \cdot 2,32 \cdot 10^5 \text{ N/C} \cdot \cos(30°) = 4,02 \cdot 10^5 \text{ N/C}.$$

La fuerza eléctrica que actúa sobre el electrón es:

$$F = e \cdot E_{\text{Total}},$$

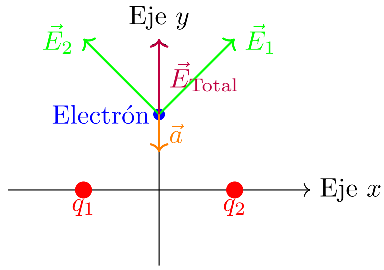
donde $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C es la carga del electrón:

$$F = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4,02 \cdot 10^5 \text{ N/C} = 6,44 \cdot 10^{-14} \text{ N}.$$

La aceleración (a) se obtiene mediante la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{6,44 \cdot 10^{-14} \text{ N}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 7,07 \cdot 10^{16} \text{ m/s}^2.$$

Representación gráfica:



Por lo tanto, la solución es:

- **El módulo del campo eléctrico que actúa sobre el electrón es $4,02 \cdot 10^5$ N/C.**
- **El módulo de la aceleración del electrón en ese instante es $7,07 \cdot 10^{16}$ m/s^2.**

Problema 3. Ondas

El moviment dels insectes en la teranyina feta per les aranyes és un moviment harmònic simple (MHS), és a dir, es pot modelitzar com una massa a l'extrem d'una molla. S'ha observat que quan l'aranya està sola a la teranyina produeix una vibració de freqüència 12 Hz. Si un insecte d'$1,00$ g de massa queda atrapat a la teranyina, el conjunt aranya i insecte produeix una vibració de 10 Hz.

a) **Calculeu la massa de l'aranya.**
b) **Calculeu la constant elàstica d'aquesta teranyina. En quines posicions aquest MHS assoleix la màxima velocitat? I la màxima acceleració?**

Solución:

a) **Calculeu la massa de l'aranya.**

Para determinar la masa de la araña ($m_{\text{araña}}$), utilizamos la fórmula de la frecuencia en un movimiento armónico simple:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},$$

donde:
- f es la frecuencia de vibración,
- k es la constante elástica del resorte,
- m es la masa total del sistema (araña + insecto).

Dado que en el primer caso solo está la araña:

$$f_{\text{araña}} = 12 \text{ Hz}.$$

Y en el segundo caso, con la araña e insecto:

$$f_{\text{total}} = 10 \text{ Hz}.$$

La masa total en el segundo caso es:

$$m_{\text{total}} = m_{\text{araña}} + m_{\text{insecto}} = m_{\text{araña}} + 1,00 \text{ g} = m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Utilizamos la relación de las frecuencias:

$$\frac{f_{\text{total}}}{f_{\text{araña}}} = \frac{10}{12} = \sqrt{\frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}}}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados:

$$\left(\frac{10}{12}\right)^2 = \frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}}.$$

Simplificamos:

$$\frac{100}{144} = \frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{36} = \frac{m_{\text{araña}}}{m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}}.$$

Resolviendo para $m_{\text{araña}}$:

$$25(m_{\text{araña}} + 1,00 \cdot 10^{-3}) = 36 m_{\text{araña}} \Rightarrow 25 m_{\text{araña}} + 25 \cdot 10^{-3} = 36 m_{\text{araña}} \Rightarrow 25 \cdot 10^{-3} = 11 m_{\text{araña}}.$$

Entonces,

$$m_{\text{araña}} = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{11} = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 2,27 \text{ g}.$$

Por lo tanto, la masa de la araña es de $2,27$ g.

b) **Calculeu la constant elàstica d'aquesta teranyina. En quines posicions aquest MHS assoleix la màxima velocitat? I la màxima acceleració?**

Utilizamos la fórmula de la frecuencia en movimiento armónico simple para el caso con la araña e insecto:

$$f_{\text{total}} = 10 \text{ Hz} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}},$$

donde:

$$m_{\text{total}} = m_{\text{araña}} + m_{\text{insecto}} = 2,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} + 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Despejamos k:

$$f_{\text{total}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_{\text{total}}}} = 2\pi f_{\text{total}} \Rightarrow \frac{k}{m_{\text{total}}} = (2\pi f_{\text{total}})^2 \Rightarrow k = m_{\text{total}}(2\pi f_{\text{total}})^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$k = 3,27 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (2\pi \cdot 10 \text{ Hz})^2 = 12,9 \text{ N/m}.$$

Por lo tanto, la constante elástica de la telaraña es $12,9$ N/m.

Problema 4. Campo Electromagnético

Un protó es mou en direcció positiva de l'eix OY en una regió on existeix un camp elèctric $\vec{E} = 3,0 \times 10^5\ \vec{k}$ N/C i un camp magnètic $\vec{B} = 0,60\ \vec{\imath}$ T.

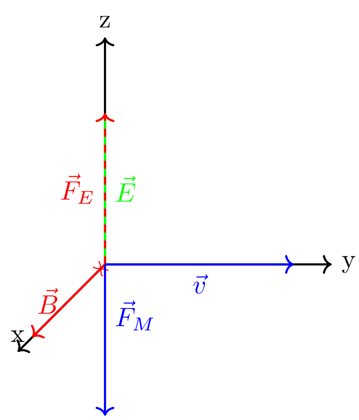
a) **Feu una representació esquemàtica de les forces que actuen sobre el protó indicant clarament els eixos, direccions i sentits. En quines condicions el protó no es desvia? Justifiqueu la resposta.**

b) **Un electró que es mou amb una velocitat $\vec{v} = 5\times10^5\ \vec{\jmath}$ m/s entra en aquesta regió. L'electró es desviarà? En cas afirmatiu, indiqueu cap a quina direcció es desvia. Justifiqueu la resposta representant esquemàticament les forces que actuen sobre l'electró.**

Solución:

a) **Feu una representació esquemàtica de les forces que actuen sobre el protó indicant clarament els eixos, direccions i sentits. En quines condicions el protó no es desvia? Justifiqueu la resposta.**

Representación esquemática:



Las fuerzas que actúan sobre el protón son:

- *Fuerza Eléctrica ($\vec{F}_E$):* Dada por la ley de Coulomb, $\vec{F}_E = q\vec{E}$. Para un protón, $q = +e$, por lo que la fuerza eléctrica está en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$.
- *Fuerza Magnética ($\vec{F}_M$):* Dada por la ley de Lorentz, $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$. Para un protón moviéndose en dirección positiva de OY, la fuerza magnética se calcula usando el producto vectorial:

$$\vec{F}_M = e \cdot \vec{v} \times \vec{B} = e \cdot (v\vec{j}) \times (B\vec{i}) = evB(\vec{j} \times \vec{i}) = -evB\vec{k}.$$

Por lo tanto, la fuerza magnética está en dirección negativa de OZ.

Para que el protón no se desvíe, la fuerza total que actúa sobre él debe ser cero:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_M = 0 \quad \Rightarrow \quad e\vec{E} - evB\vec{k} = 0.$$

Como $\vec{E}$ está en la dirección positiva de OZ, para que las fuerzas se cancelen, debe cumplirse:

$$eE - evB = 0 \quad \Rightarrow \quad E = vB.$$

Despejando la velocidad v:

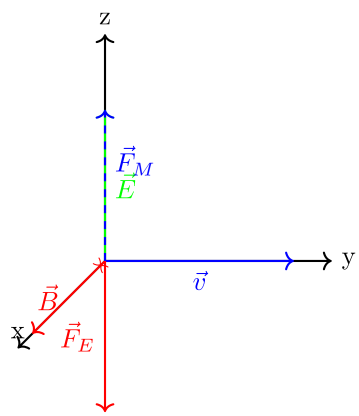
$$v = \frac{E}{B} = \frac{3,0 \cdot 10^5 \text{ N/C}}{0,60 \text{ T}} = 5,0 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la solución es:

– **La fuerza aplicada por el campo eléctrico sobre el protón es $\vec{F}_E = e\vec{E}$.**
– **La fuerza aplicada por el campo magnético sobre el protón es $\vec{F}_M = -evB\vec{k}$.**
– **El protón no se desvía cuando la velocidad v cumple la condición $v = \dfrac{E}{B} = 5,0 \cdot 10^5$ m/s.**

b) **Un electró que es mou amb una velocitat $\vec{v} = 5\times10^5\ \vec{\jmath}$ m/s entra en aquesta regió. L'electró es desviarà? En cas afirmatiu, indiqueu cap a quina direcció es desvia. Justifiqueu la resposta representant esquemàticament les forces que actuen sobre l'electró.**

Representación esquemática:



Dado que el electrón tiene carga $q = -e$, las fuerzas se calculan de la siguiente manera:
– *Fuerza Eléctrica ($\vec{F}_E$):*

$$\vec{F}_E = q\vec{E} = -e\vec{E}.$$

Como $\vec{E}$ está en dirección positiva de OZ y q es negativo, la fuerza eléctrica está en dirección negativa de OZ.
– *Fuerza Magnética ($\vec{F}_M$):*

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} = -e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Dado que $\vec{v} = v\vec{j}$ y $\vec{B} = B\vec{i}$:

$$\vec{v} \times \vec{B} = v\vec{j} \times B\vec{i} = vB(\vec{j} \times \vec{i}) = -vB\vec{k}.$$

Entonces,

$$\vec{F}_M = -e(-vB\vec{k}) = evB\vec{k}.$$

La fuerza magnética está en dirección positiva de OZ.

Cálculo del campo eléctrico que actúa sobre el electrón:

$$E_1 = E_2 = \frac{k_e \cdot Q}{d^2},$$

donde $Q = 25,8 \cdot 10^{-6}$ C es la carga de cada esfera y $d = 1,00$ m es la distancia desde cada esfera al punto donde se encuentra el electrón. Sustituyendo los valores:

$$E_1 = E_2 = \frac{8,99 \cdot 10^9\ \text{N·m}^2/\text{C}^{-2} \cdot 25,8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(1,00\ \text{m})^2} = 2,32 \cdot 10^5\ \text{N/C}.$$

Dado que el electrón está equidistante a ambas esferas, el campo eléctrico total es la suma vectorial de los campos eléctricos individuales. Sin embargo, debido a que las cargas son positivas y el electrón tiene carga negativa, las direcciones de las fuerzas se suman:

$$\vec{F}_{\text{Total}} = \vec{F}_E + \vec{F}_M = -eE\vec{k} + evB\vec{k} = e(vB - E)\vec{k}.$$

Sustituyendo los valores:

$$\vec{F}_{\text{Total}} = e(5 \cdot 10^5 \text{ m/s} \cdot 0,60 \text{ T} - 3,0 \cdot 10^5 \text{ N/C})\vec{k} = e(3,0 \cdot 10^5 \text{ N/C} - 3,0 \cdot 10^5 \text{ N/C})\vec{k} = 0 \ \vec{k}.$$

Vemos que la fuerza total que actúa sobre el electrón es nula, por lo que no se desviará.

Por lo tanto, la solución es:
- **El módulo del campo eléctrico que actúa sobre el electrón es $\mathbf{4,02 \cdot 10^5}$ N/C.**
- **El módulo de la aceleración del electrón en ese instante es $\mathbf{7,07 \cdot 10^{16}}$ m/s^2.**
- **El electrón no se desviará ya que la fuerza total que actúa sobre él es nula.**

Problema 5. Física Moderna

La datació per carboni 14 és una eina molt útil per a estimar l'edat de restes òssies o fòssils. Aquesta tècnica es basa en el cicle següent:

- **Un nucli de nitrogen 14, $^{14}_{7}$N, captura un neutró provinent de raigs còsmics de l'espai, allibera un protó i es converteix en carboni 14.**
- **El carboni 14 forma molècules de CO_2 que són absorbides per les plantes.**
- **Quan els animals mengen les plantes, incorporen el carboni 14.**
- **Quan un animal mor, ja no incorpora més carboni 14. A partir d'aquest punt el contingut de carboni 14 disminueix progressivament i es converteix en nitrogen 14.**

a) **Escriviu la reacció nuclear mitjançant la qual el nitrogen 14 es transforma en carboni 14 per l'efecte dels raigs còsmics. Justifiqueu si la reacció absorbeix o allibera energia.**
b) **Al laboratori es comparen dues mostres òssies d'elefant. La mostra A és d'un individu mort recentment i la mostra B té datació desconeguda. Sabent que la mostra B conté un 23 % menys de carboni 14 que la mostra A, quina edat té aquesta mostra?**

Dades:
Període de semidesintegració del carboni 14: 5 730 anys.
Masses (en unitats de massa atòmiques):
Neutró: 1,0086649 u
Protó: 1,00727647 u
Nitrogen 14: 14,003074 u
Carboni 14: 14,003241 u.

Solución:

a) **Escriviu la reacció nuclear mitjançant la qual el nitrogen 14 es transforma en carboni 14 per l'efecte dels raigs còsmics. Justifiqueu si la reacció absorbeix o allibera energia.**

La reacción nuclear que describe la transformación del nitrógeno 14 en carbono 14 mediante la captura de un neutrón y la emisión de un protón es la siguiente:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{p}.$$

Alternativamente, se puede expresar utilizando la partícula beta:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + \beta^{+}.$$

Calculamos la diferencia de masas entre reactivos y productos para determinar si la reacción absorbe o libera energía:

$$\Delta m = [m({}^{14}_{7}\mathrm{N}) + m({}^{1}_{1}\mathrm{p})] - [m({}^{14}_{6}\mathrm{C}) + m({}^{1}_{0}\mathrm{n})].$$

Sustituyendo los valores:

$$\Delta m = -1,22 \times 10^{-3} \text{ u}.$$

Dado que la masa disminuye ($\Delta m < 0$), la reacción libera energía. Esta liberación de energía se manifiesta en forma de luz o radiación gamma.

Por lo tanto, la reacción nuclear libera energía debido a la disminución de masa durante la transformación del nitrógeno 14 en carbono 14.

b) **Al laboratori es comparen dues mostres òssies d'elefant. La mostra A és d'un individu mort recentment i la mostra B té datació desconeguda. Sabent que la mostra B conté un 23 % menys de carboni 14 que la mostra A, quina edat té aquesta mostra?**

Utilizamos la ley de decaimiento exponencial del carbono 14:

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t},$$

donde:
- $m(t)$ es la cantidad de carbono 14 en el tiempo t,
- m_0 es la cantidad inicial de carbono 14,
- λ es la constante de decaimiento,
- $T_{1/2}$ es el período de semidesintegración.

La constante de decaimiento se relaciona con el período de semidesintegración mediante:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{5730 \text{ años}} = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}.$$

Dado que la muestra B contiene un 23 % menos de carbono 14 que la muestra A, esto significa que:

$$\frac{m_B}{m_A} = 1 - 0,23 = 0,77.$$

Aplicamos la ley de decaimiento:

$$\frac{m_B}{m_A} = e^{-\lambda t} = 0,77.$$

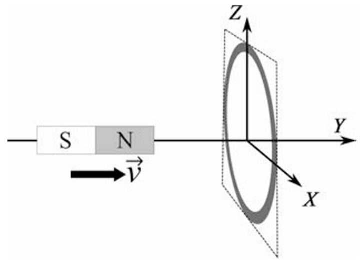
Despejamos t:

$$t = -\frac{\ln(0,77)}{\lambda} = -\frac{\ln(0,77)}{1,21 \cdot 10^{-4} \text{ años}^{-1}} = 2160 \text{ años}.$$

Por lo tanto, la muestra B tiene una edad aproximada de 2 160 años.

Problema 6. Campo Electromagnético

Un imant es mou amb una velocitat $\vec{v}$ en l'eix Y cap a una espira conductora en el pla XZ, com s'observa a la figura. Els pols de l'imant són els que s'indiquen en la figura.



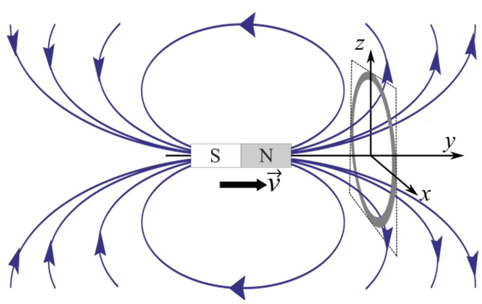
a) **Dibuixeu 8 línies de camp magnètic de l'imant de manera que algunes línies travessin l'espira. Indiqueu clarament el sentit de les línies de camp. S'indueix un corrent a l'espira a causa del moviment de l'imant? En cas afirmatiu, indiqueu el sentit del corrent induït. Justifiqueu la resposta.**

b) **Si ara movem l'imant en sentit oposat, de manera que s'allunya de l'espira, es produirà alguna força entre l'imant i l'espira? En cas afirmatiu, quin sentit tindrà aquesta força? Justifiqueu la resposta.**

Solución:

a) **Dibuixeu 8 línies de camp magnètic de l'imant de manera que algunes línies travessin l'espira. Indiqueu clarament el sentit de les línies de camp. S'indueix un corrent a l'espira a causa del moviment de l'imant? En cas afirmatiu, indiqueu el sentit del corrent induït. Justifiqueu la resposta.**

Dibujo de las líneas de campo magnético:



Las líneas de campo magnético del imán salen del polo norte y entran por el polo sur. Algunas de estas líneas atraviesan la espira, como se muestra en el dibujo. Al mover el imán hacia la espira, el flujo magnético Φ_B a través de ésta aumenta debido al incremento del campo magnético $\vec{B}$. Según la Ley de Faraday, una variación en el flujo magnético induce una fuerza electromotriz (f.e.m.) en la espira dada por:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Por lo tanto, se induce una corriente eléctrica en la espira. De acuerdo con la Ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida es tal que el campo magnético que crea se opone al aumento del flujo magnético. Como el flujo está aumentando, el campo magnético inducido debe tener sentido opuesto al campo del imán. Usando la regla de la mano derecha, el sentido de la corriente inducida en la espira es antihorario cuando se mira desde el lado por donde se acerca el imán.

Por lo tanto, el sentido de la corriente inducida en la espira es antihorario cuando se mira desde el lado por donde se acerca el imán.

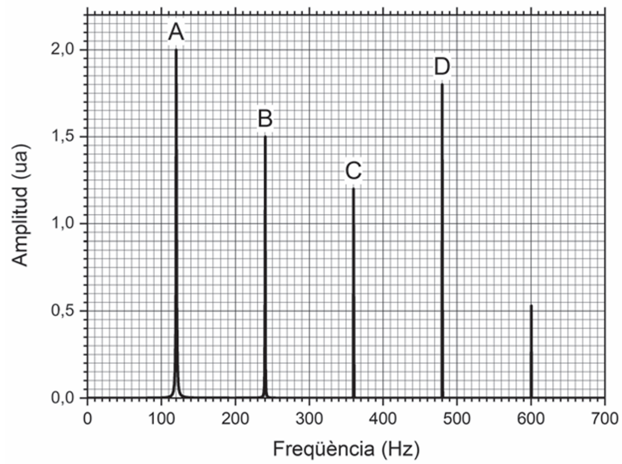
Si ara movem l'imant en sentit oposat, de manera que s'allunya de l'espira, es produirà alguna força entre l'imant i l'espira? En cas afirmatiu, quin sentit tindrà aquesta força? Justifiqueu la resposta.

Si el imán se mueve en sentido opuesto, alejándose de la espira, el flujo magnético Φ_B a través de ésta disminuye. Según la Ley de Faraday, esta variación también induce una f.e.m. y una corriente en la espira. La Ley de Lenz indica que la corriente inducida generará un campo magnético que se opone a la disminución del flujo.

Por lo tanto, el campo magnético inducido tendrá el mismo sentido que el campo del imán. Esto resulta en una fuerza atractiva entre el imán y la espira. La espira ejerce una fuerza sobre el imán para oponerse a su alejamiento, atrayéndolo.

Problema 7. Ondas

Quan es fa vibrar una corda de $40,0$ cm de llargada i fixada pels dos extrems, emet un so que, un cop analitzat, produeix l'espectre següent:



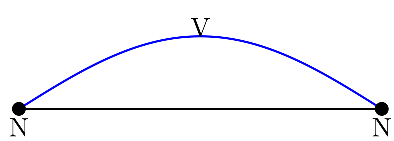
a) **Representeu esquemàticament les ones estacionàries corresponents als pics A, B, C i D indicant tots els nodes i tots els ventres. Calculeu la longitud d'ona de cadascuna d'aquestes quatre ones estacionàries. Quina és la velocitat de propagació?**

b) **La longitud de la corda disminueix fins a $20,0$ cm sense que canviï la velocitat de propagació de les ones per la corda. Quines seran les freqüències i les longituds d'ona de les quatre primeres ones estacionàries?**

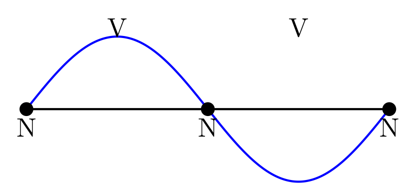
Solución:

a) **Representeu esquemàticament les ones estacionàries corresponents als pics A, B, C i D indicant tots els nodes i tots els ventres. Calculeu la longitud d'ona de cadascuna d'aquestes quatre ones estacionàries. Quina és la velocitat de propagació?**

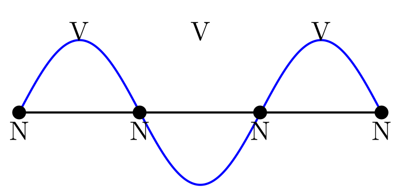
Las ondas estacionarias correspondientes a los picos A, B, C y D son los primeros cuatro modos normales de vibración de la cuerda (n = 1, 2, 3 y 4). A continuación se muestran las representaciones esquemáticas indicando los nodos (N) y los vientres (V):



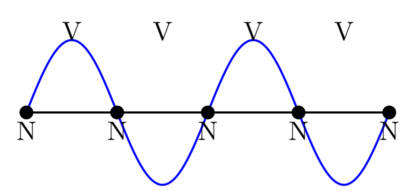
Modo n=1 (Pico A)



Modo n=2 (Pico B)



Modo n=3 (Pico C)



Modo n=4 (Pico D)

Para una cuerda fija en ambos extremos, las longitudes de onda permitidas están dadas por:

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

donde L es la longitud de la cuerda. Dado que $L = 40,0$ cm $= 0,400$ m:

– Para n = 1 (Pico A):

$$\lambda_1 = \frac{2L}{1} = 2 \cdot 0,400 \text{ m} = 0,800 \text{ m}.$$

– Para n = 2 (Pico B):

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = 0,400 \text{ m}.$$

– Para n = 3 (Pico C):

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{0,800 \text{ m}}{3} \approx 0,267 \text{ m}.$$

– Para n = 4 (Pico D):

$$\lambda_4 = \frac{2L}{4} = 0,200 \text{ m}.$$

La velocidad de propagación v es constante y puede calcularse utilizando:

$$v = \lambda_n \cdot f_n = 0,8 \text{ m} \cdot 120 \text{ Hz} = 96,0 \text{ m/s}$$

Verificamos con otro modo (n = 2):

$$v = \lambda_2 \cdot f_2 = 0,400 \text{ m} \cdot 240 \text{ Hz} = 96,0 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, la longitud de onda y la velocidad de propagación son:
– **Pico A: $\boldsymbol{\lambda_1 = 0,800}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**
– **Pico B: $\boldsymbol{\lambda_2 = 0,400}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**
– **Pico C: $\boldsymbol{\lambda_3 = 0,267}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**
– **Pico D: $\boldsymbol{\lambda_4 = 0,200}$ m, $\boldsymbol{v = 96,0}$ m/s.**

b) La longitud de la corda disminueix fins a 20, 0 cm sense que canviï la velocitat de propagació de les ones per la corda. Quines seran les freqüències i les longituds d'ona de les quatre primeres ones estacionàries?

La nueva longitud de la cuerda es $L' = 20,0$ cm $= 0,200$ m. Las nuevas longitudes de onda son:

$$\lambda'_n = \frac{2L'}{n}.$$

– Para n = 1:

$$\lambda'_1 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{1} = 0,400 \text{ m}.$$

– Para n = 2:

$$\lambda'_2 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{2} = 0,200 \text{ m}.$$

– Para n = 3:

$$\lambda'_3 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{3} = 0,133 \text{ m}.$$

– Para n = 4:

$$\lambda'_4 = \frac{2 \times 0,200 \text{ m}}{4} = 0,100 \text{ m}.$$

Las frecuencias correspondientes, utilizando $v = 96,0$ m/s, son:

$$f'_n = \frac{v}{\lambda'_n}.$$

– Para n = 1:

$$f'_1 = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,400 \text{ m}} = 240 \text{ Hz}.$$

– Para n = 2:

$$f'_2 = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,200 \text{ m}} = 480 \text{ Hz}.$$

– Para n = 3:

$$f'_3 = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,133 \text{ m}} = 720 \text{ Hz}.$$

– Para n = 4:

$$f'_4 = \frac{96,0 \text{ m/s}}{0,100 \text{ m}} = 960 \text{ Hz}.$$

Al reducir la longitud de la cuerda a la mitad, las longitudes de onda se reducen a la mitad y las frecuencias se duplican.

Por lo tanto, las nuevas longitudes de onda y frecuencias son:
- **Primer armónico (n = 1): $\lambda'_1 = 0,400$ m, $f'_1 = 240$ Hz.**
- **Segundo armónico (n = 2): $\lambda'_2 = 0,200$ m, $f'_2 = 480$ Hz.**
- **Tercer armónico (n = 3): $\lambda'_3 = 0,133$ m, $f'_3 = 720$ Hz.**
- **Cuarto armónico (n = 4): $\lambda'_4 = 0,100$ m, $f'_4 = 960$ Hz.**

Problema 8. Física Moderna

Tenim una fotocèllula en la qual el càtode és fet d'un material alcalí que només pot emetre electrons per efecte fotoelèctric si els fotons tenen una energia superior a $1,20$ eV. Enviem sobre el càtode un feix de fotons format per 10^7 fotons/s d'una longitud d'ona de llum verda de 500 nm.

a) **Quina energia cinètica tindran els electrons arrancats del càtode per aquesta llum verda?**
b) **Si en lloc de 10^7 fotons/s sobre el càtode hi enviem un feix 10 vegades més intens (i.e., 10^8 fotons/s), quins canvis es produiran en l'emissió dels electrons? Justifiqueu la resposta.**

Dades:
$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ **J.**
$c = 3,00 \times 10^8$ **m/s.**
$h = 6,63 \times 10^{-34}$ **J·s.**

Solución:

a) **Quina energia cinètica tindran els electrons arrancats del càtode per aquesta llum verda?**

La energía de un fotón se calcula mediante la fórmula de Planck:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{h \cdot c}{\lambda},$$

donde:
- $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s es la constante de Planck,
- $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s es la velocidad de la luz,
- $\lambda = 500 \text{ nm} = 500 \cdot 10^{-9}$ m es la longitud de onda de la luz verde.

Sustituyendo los valores:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J·s} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 3,978 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Convertimos la energía a electronvoltios:

$$E_{\text{fotón}} = \frac{3,978 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,48 \text{ eV}.$$

La energía cinética máxima de los electrones arrancados se calcula usando la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$E_{\text{C,max}} = E_{\text{fotón}} - W_e,$$

donde:
- $E_{\text{C,max}}$ es la energía cinética máxima del electrón,
- $E_{\text{fotón}} = 2,48$ eV es la energía de los fotones incidentes,
- $W_e = 1,20$ eV es la función de trabajo del material.

Sustituyendo los valores:

$$E_{\text{C,max}} = 2,48 \text{ eV} - 1,20 \text{ eV} = 1,28 \text{ eV}.$$

Por lo tanto, los electrones arrancados del cátodo por la luz verde tendrán una energía cinética máxima de $1,28$ eV.

b) Si en lloc de 10^7 fotons/s sobre el càtode hi enviem un feix 10 vegades més intens (i.e., 10^8 fotons/s), quins canvis es produiran en l'emissió dels electrons? Justifiqueu la resposta.

La energía cinética de los electrones arrancados depende únicamente de la energía de los fotones incidentes, la cual está determinada por la longitud de onda de la luz. En este caso, la longitud de onda y, por lo tanto, la energía de los fotones no cambian. Sin embargo, al aumentar la intensidad del haz en un factor de 10, se está incrementando el número de fotones incidentes por segundo. Esto tiene un efecto directo en el número de electrones que pueden ser arrancados del cátodo, ya que cada fotón con energía suficiente puede arrancar un electrón.

Por lo tanto, al aumentar la intensidad del haz a 10^8 fotones/s, el número de electrones emitidos aumentará en un factor de 10, lo que se traduce en un aumento de la intensidad de corriente en la fotocélula. Sin embargo, la energía cinética de cada electrón arrancado permanecerá constante en $1,28$ eV, ya que depende únicamente de la energía de los fotones y no de la intensidad del haz.